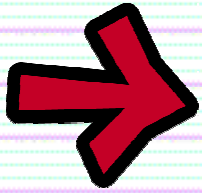


THEME 8

RACINE CARREE EXERCICES CORRIGES



Exercice 1:

Simplifier les écritures suivantes :

$$A = 2\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{125}$$

$$B = 7\sqrt{3} - 3\sqrt{48} + 5\sqrt{12}$$

$$C = \sqrt{96} + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{24} - 3\sqrt{54}$$

$$D = 2\sqrt{32} - 3\sqrt{50} + 6\sqrt{8}$$

Correction :

$$\blacktriangleright A = 2\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{125}$$

Simplifions les différentes racines de cette expression.

Nous avons :

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3 \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = \sqrt{25} \times \sqrt{5} = 5 \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

Remplaçons, dans l'expression A, ces racines carrées par leurs écritures simplifiées.

Nous avons :

$$A = 2 \times 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5}$$

$$A = 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = (4 - 3 + 5)\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

$$A = 6\sqrt{5}$$

Remarque : Une autre rédaction est souhaitée. Au lieu de simplifier séparément les différentes racines, nous pouvons, dans l'expression A, les simplifier simultanément.

$$\blacktriangleright B = 7\sqrt{3} - 3\sqrt{48} + 5\sqrt{12}$$

Nous avons successivement :

$$B = 7\sqrt{3} - 3\sqrt{4 \times 12} + 5\sqrt{4 \times 3}$$

$$B = 7\sqrt{3} - 3\sqrt{4} \times \sqrt{12} + 5\sqrt{4} \times \sqrt{3}$$

$$B = 7\sqrt{3} - 3 \times 2 \times \sqrt{12} + 5 \times 2 \times \sqrt{3}$$

$$B = 7\sqrt{3} - 6\sqrt{12} + 10\sqrt{3}$$

$$B = 17\sqrt{3} - 6\sqrt{12}$$

Nous devons continuer et simplifier $\sqrt{12}$

$$B = 17\sqrt{3} - 6\sqrt{4} \times \sqrt{3} = 17\sqrt{3} - 6 \times 2 \times \sqrt{3} = 17\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

La simplification de $\sqrt{48}$ a été exécutée en deux étapes. La rédaction pouvait être plus rapide en constatant que $48 = 16 \times 3$. Nous obtenons alors :

$$B = 7\sqrt{3} - 3\sqrt{16 \times 3} + 5\sqrt{4 \times 3}$$

$$B = 7\sqrt{3} - 3\sqrt{16} \times \sqrt{3} + 5\sqrt{4} \times \sqrt{3}$$

$$B = 7\sqrt{3} - 3 \times 4 \times \sqrt{3} + 5 \times 2 \times \sqrt{3}$$

Les carrés parfaits : (sauf 1)

4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...

et la racine carrée de ces carrés parfaits :

$$\sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3, \sqrt{16} = 4, \sqrt{25} = 5,$$

$$\sqrt{36} = 6, \sqrt{49} = 7, \dots$$

$$B = 7\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$B = 5\sqrt{3}$$

$$\blacktriangleright C = \sqrt{96} + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{24} - 3\sqrt{54}$$

Essayons de déterminer dans chaque radicande (nombre situé sous le radical) le carré parfait le plus grand possible.

$$C = \sqrt{16 \times 6} + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{4 \times 6} - 3\sqrt{9 \times 6}$$

$$C = \sqrt{16} \times \sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{4} \times \sqrt{6} - 3\sqrt{9} \times \sqrt{6}$$

$$C = 4\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 2 \times 2\sqrt{6} - 3 \times 3\sqrt{6}$$

$$C = 4\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 4\sqrt{6} - 9\sqrt{6} = -7\sqrt{6}$$

$$C = -7\sqrt{6}$$

$$\blacktriangleright D = 2\sqrt{32} - 3\sqrt{50} + 6\sqrt{8}$$

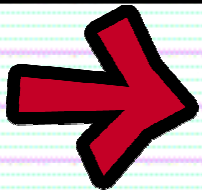
$$D = 2\sqrt{16 \times 2} - 3\sqrt{25 \times 2} + 6\sqrt{4 \times 2}$$

$$2\sqrt{16} \times \sqrt{2} - 3\sqrt{25} \times \sqrt{2} + 6\sqrt{4} \times \sqrt{2}$$

$$D = 2 \times 4 \times \sqrt{2} - 3 \times 5 \times \sqrt{2} + 6 \times 2 \times \sqrt{2}$$

$$D = 8\sqrt{2} - 15\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$D = 5\sqrt{2}$$



Exercice 2:

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = (\sqrt{2} - 1)(2 - \sqrt{2})$$

$$B = (2\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$C = (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$D = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$$

$$E = (3\sqrt{2} - 1)^2 - (2\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$$

Correction :

$$\blacktriangleright A = (\sqrt{2} - 1)(2 - \sqrt{2})$$

$$A = \sqrt{2} \times 2 - \sqrt{2} \times \sqrt{2} - 1 \times 2 + 1 \times \sqrt{2} =$$

$$A = 2\sqrt{2} - (\sqrt{2})^2 - 2 + \sqrt{2} \quad \text{mais } (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$A = 2\sqrt{2} - 2 - 2 + \sqrt{2}$$

$$A = -4 + 3\sqrt{2}$$

$$A = -4 + 3\sqrt{2}$$

$$\blacktriangleright B = (2\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$B = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \times \sqrt{5} - \sqrt{5} \times \sqrt{2} - \sqrt{5} \times \sqrt{5}$$

$$B = 2(\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{5} - \sqrt{5} \times \sqrt{2} - (\sqrt{5})^2$$

Sachant que $(\sqrt{2})^2 = 2$, que $(\sqrt{5})^2 = 5$ et que $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{5} \times \sqrt{2} = \sqrt{10}$, nous avons :

$$B = 2 \times 2 + 2\sqrt{10} - \sqrt{10} - 5 = 4 + 2\sqrt{10} - \sqrt{10} - 5 = -1 + \sqrt{10}$$

$$B = -1 + \sqrt{10}$$

$$\blacktriangleright C = (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$C = \sqrt{6} \times \sqrt{3} - \sqrt{6} \times \sqrt{2} + 2 \times \sqrt{3} - 2 \times \sqrt{2}$$

$$C = \sqrt{6 \times 3} - \sqrt{6 \times 2} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$$

$$C = \sqrt{18} - \sqrt{12} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$$

Simplifions maintenant $\sqrt{18}$ et $\sqrt{12}$. Nous avons :

$$C = \sqrt{9 \times 2} - \sqrt{4 \times 3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$$

$$C = \sqrt{9} \times \sqrt{2} - \sqrt{4} \times \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$$

$$C = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$C = \sqrt{2}$$

Remarque : Il existait ici une autre façon de simplifier cette expression.

$$C = (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

Le premier facteur $\sqrt{6} + 2$ peut s'écrire (en factorisant) :

$$\sqrt{6} + 2 = \sqrt{2 \times 3} + (\sqrt{2})^2 = \sqrt{2} \times \sqrt{3} + \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2} \times (\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$C = (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{2} (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{2} [(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2]$$

$$C = \sqrt{2} [3 - 2] = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$$

$$\blacktriangleright D = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$$

$$D = [(3)^2 + 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2] - [(3)^2 - 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2]$$

$$D = [3 + 2\sqrt{3}\sqrt{5} + 5] - [3 - 2\sqrt{3}\sqrt{5} + 5]$$

En écrivant $\sqrt{3}\sqrt{5}$ sous la forme $\sqrt{15}$ et en supprimant les parenthèses, nous obtenons :

$$D = 3 + 2\sqrt{15} + 5 - 3 + 2\sqrt{15} - 5 = 2\sqrt{15} + 2\sqrt{15} = 4\sqrt{15}$$

$$D = 4\sqrt{15}$$

$$\blacktriangleright E = (3\sqrt{2} - 1)^2 - (2\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$$

$$E = [(3\sqrt{2})^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 1 + 1^2] - (2(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1)$$

$$E = [3^2(\sqrt{2})^2 - 6\sqrt{2} + 1] - (2 \times 2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1)$$

$$E = [9 \times 2 - 6\sqrt{2} + 1] - (4 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1)$$

$$E = [18 - 6\sqrt{2} + 1] - (4 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1) \quad \text{ou} \quad E = [19 - 6\sqrt{2}] - (3 - \sqrt{2})$$

$$E = 18 - 6\sqrt{2} + 1 - 4 + 2\sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 \quad \text{ou} \quad E = 19 - 6\sqrt{2} - 3 + \sqrt{2}$$

$$E = 16 - 5\sqrt{2}$$

$$E = 16 - 5\sqrt{2}$$



Exercice 3:

On donne les nombres : $a = 2\sqrt{5} - 3$ et $b = 2\sqrt{5} + 3$
Calculer $a + b$, $a - b$, $a^2 + b^2$, ab et $(a + b)^2$

Correction :

► Calcul de $a + b$:

Remplaçons a et b par les valeurs données ci-dessus.

Attention, toute valeur doit être considérée comme une valeur entre parenthèses (Il est vrai que si cette valeur est simple, les parenthèses sont omises)

Si $a = 2$, il faut lire $a = (2)$ (ici les parenthèses sont inutiles)

Si $a = -3$, il faut lire $a = (-3)$

Si $a = \sqrt{5}$, il faut lire $a = (\sqrt{5})$

Si $a = -3\sqrt{2}$, il faut lire $a = (-3\sqrt{2})$

Si $a = 2\sqrt{5} - 3$, il faut lire $a = (2\sqrt{5} - 3)$

$$a + b = (2\sqrt{5} - 3) + (2\sqrt{5} + 3)$$

$$a + b = 2\sqrt{5} - 3 + 2\sqrt{5} + 3 = 4\sqrt{5}$$

$$a + b = 4\sqrt{5}$$

► Calcul de $a - b$:

$$a - b = (2\sqrt{5} - 3) - (2\sqrt{5} + 3)$$

$$a - b = 2\sqrt{5} - 3 - 2\sqrt{5} - 3 = -6$$

$$a - b = -6$$

► Calcul de $a^2 + b^2$:

$$a^2 + b^2 = (2\sqrt{5} - 3)^2 + (2\sqrt{5} + 3)^2$$

$$a^2 + b^2 = [(2\sqrt{5})^2 - 12\sqrt{5} + 3^2] + [(2\sqrt{5})^2 + 12\sqrt{5} + 3^2]$$

$$a^2 + b^2 = [2^2(\sqrt{5})^2 - 12\sqrt{5} + 9] + [2^2(\sqrt{5})^2 + 12\sqrt{5} + 9]$$

$$a^2 + b^2 = [4 \times 5 - 12\sqrt{5} + 9] + [4 \times 5 + 12\sqrt{5} + 9]$$

$$a^2 + b^2 = [20 - 12\sqrt{5} + 9] + [20 + 12\sqrt{5} + 9]$$

$$a^2 + b^2 = [29 - 12\sqrt{5}] + [29 + 12\sqrt{5}] = 29 - 12\sqrt{5} + 29 + 12\sqrt{5} = 58$$

$$a^2 + b^2 = 20 - 12\sqrt{5} + 9 + 20 + 12\sqrt{5} + 9 = 20 + 9 + 20 + 9 = 58$$

$$a^2 + b^2 = 58$$

► Calcul de ab :

$$ab = a \times b = (2\sqrt{5} - 3)(2\sqrt{5} + 3)$$

$$ab = (2\sqrt{5})^2 - 3^2 = 2^2(\sqrt{5})^2 - 3^2 = 4 \times 5 - 9 = 20 - 9 = 11$$

$$ab = 11$$

► Calcul de $(a + b)^2$:

$$(a + b)^2 = [(2\sqrt{5} - 3) + (2\sqrt{5} + 3)]^2$$

$$(a + b)^2 = [2\sqrt{5} - 3 + 2\sqrt{5} + 3]^2$$

$$(a + b)^2 = [4\sqrt{5}]^2$$

$$(a + b)^2 = 4^2(\sqrt{5})^2 = 16 \times 5 = 80$$

$$(a + b)^2 = 80$$



Exercice 4: d'après Brevet des Collèges - Poitiers - 1990

Prouver que $\sqrt{8} \times \sqrt{2} - 2\sqrt{75} + 5\sqrt{12}$ est un nombre entier . (le symbole "x" est le symbole de la multiplication)

Correction :

$$\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4 \text{ (d'après la propriété } \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \text{ qui doit également se lire } \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \text{)}$$

L'expression à calculer est donc égale à (nous appellerons A cette expression) :

$$A = \sqrt{8 \times 2} - 2\sqrt{75} + 5\sqrt{12}$$

$$A = \sqrt{16} - 2\sqrt{25 \times 3} + 5\sqrt{4 \times 3}$$

$$A = 4 - 2\sqrt{25} \times \sqrt{3} + 5\sqrt{4} \times \sqrt{3}$$

$$A = 4 - 2 \times 5 \times \sqrt{3} + 5 \times 2 \times \sqrt{3}$$

$$A = 4 - 10\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 4$$

$$A = 4 \text{ donc } A \text{ est un entier}$$

Remarque :

Le premier terme pouvait également être simplifier comme suit :

$$\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{4 \times 2} \times \sqrt{2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \times (\sqrt{2})^2 = 2 \times 2 = 4$$



Exercice 5:

Les côtés d'un triangle IJK ont pour longueurs :

$$IJ = 2\sqrt{3} + 3 \quad IK = 3\sqrt{3} - 2 \quad \text{et} \quad JK = 2\sqrt{13}$$

Démontrer que le triangle IJK est rectangle .

Correction :

Recherche du plus grand côté :

A l'aide de la calculatrice , nous constatons que :

$$IJ = 2\sqrt{3} + 3 \approx 6,46$$

$$IK = 3\sqrt{3} - 2 \approx 3,19$$

et

$$JK = 2\sqrt{13} \approx 7,21$$

Par conséquent , si le triangle IJK est rectangle , il ne peut être rectangle qu'en I.

Le triangle IJK est-il rectangle en I ?

Nous avons (calculs séparés) :

$$\blacktriangleright JK^2 = (2\sqrt{13})^2 = 2^2 \times (\sqrt{13})^2 = 4 \times 13 = 52$$

$$\blacktriangleright IJ^2 + IK^2 = (2\sqrt{3} + 3)^2 + (3\sqrt{3} - 2)^2$$

$$IJ^2 + IK^2 = [(2\sqrt{3})^2 + 12\sqrt{3} + 3^2] + [(3\sqrt{3})^2 - 12\sqrt{3} + 2^2]$$

$$IJ^2 + IK^2 = [2^2(\sqrt{3})^2 + 12\sqrt{3} + 9] + [3^2(\sqrt{3})^2 - 12\sqrt{3} + 4]$$

$$IJ^2 + IK^2 = [4 \times 3 + 12\sqrt{3} + 9] + [9 \times 3 - 12\sqrt{3} + 4]$$

$$IJ^2 + IK^2 = [12 + 12\sqrt{3} + 9] + [27 - 12\sqrt{3} + 4]$$

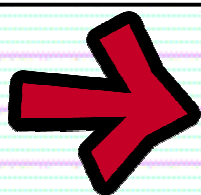
Continuons le calcul dans chaque parenthèse ou supprimons les :

$$IJ^2 + IK^2 = 12 + 12\sqrt{3} + 9 + 27 - 12\sqrt{3} + 4 = 12 + 9 + 27 + 4 = 52$$

Ces deux calculs permettent d'écrire que :

$$JK^2 = IJ^2 + IK^2$$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle IJK est rectangle en I



Exercice 6: Brevet des Collèges - Caen - 1994

Soit l'expression $C = x^2 - 6x + 7$

a) Calculer C pour $x = \sqrt{5}$ et écrire le résultat sous la forme $a + b\sqrt{5}$ où a et b sont des entiers relatifs .

b) Calculer C pour $x = 3 + \sqrt{2}$

Correction :

\blacktriangleright Si $x = \sqrt{5}$, nous avons :

$$C = (\sqrt{5})^2 - 6 \times \sqrt{5} + 7$$

$$C = 5 - 6 \times \sqrt{5} + 7 = 12 - 6\sqrt{5}$$

$$C = 12 - 6\sqrt{5}$$

\blacktriangleright Si $x = 3 + \sqrt{2}$ ou $(3 + \sqrt{2})$, nous avons :

$$C = (3 + \sqrt{2})^2 - 6 \times (3 + \sqrt{2}) + 7$$

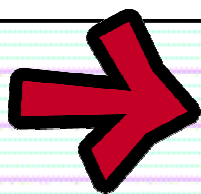
$$C = [3^2 + 6\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2] - 6 \times (3 + \sqrt{2}) + 7$$

$$C = [9 + 6\sqrt{2} + 2] - 6 \times (3 + \sqrt{2}) + 7$$

$$C = 9 + 6\sqrt{2} + 2 - 18 - 6\sqrt{2} + 7$$

$$C = 9 + 2 - 18 + 7 + 6\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 0$$

$$C = 0$$



Exercice 7: Brevet des Collèges - Reims - Septembre 93

Effectuer le calcul suivant en donnant le résultat sous la forme $a\sqrt{2}$, a étant un entier relatif .

$$B = 2\sqrt{8} - 8\sqrt{2} + 3(\sqrt{2})^3 - \sqrt{50}$$

Correction :

$$B = 2\sqrt{8} - 8\sqrt{2} + 3(\sqrt{2})^3 - \sqrt{50}$$

Si nous regardons l'expression, nous pouvons constater que nous devons simplifier chacun des termes .

$\sqrt{8}$ se simplifie sans problème, ainsi que $\sqrt{50}$. La difficulté provient du troisième terme $3(\sqrt{2})^3$.

Aucune propriété liant les racines carrées et l'élevation à la puissance 3 n'est connue. Revenons donc à la définition de l'élevation au cube.

Nous avons :

$$(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 \times \sqrt{2} = 2 \times \sqrt{2}$$

Remplaçons donc $(\sqrt{2})^3$ par $2 \times \sqrt{2}$

Nous avons :

$$B = 2\sqrt{4 \times 2} - 8\sqrt{2} + 3 \times 2 \times \sqrt{2} - \sqrt{25 \times 2}$$

$$B = 2\sqrt{4} \times \sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 3 \times 2 \times \sqrt{2} - \sqrt{25} \times \sqrt{2}$$

$$B = 2 \times 2 \times \sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 3 \times 2 \times \sqrt{2} - 5 \times \sqrt{2}$$

$$B = 4\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$$

$$B = -3\sqrt{2}$$

$$B = -3\sqrt{2}$$



Exercice 8: Brevet des Collèges - Nice - Montpellier - Toulouse - 1991

Développer et écrire le plus simplement possible :

$$D = (4 + 5\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2} + 3)(3\sqrt{2} + 7)$$

Correction :

$$D = (4 + 5\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2} + 3)(3\sqrt{2} + 7)$$

$$D = [4^2 + 40\sqrt{2} + (5\sqrt{2})^2] + (6(\sqrt{2})^2 + 14\sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 21)$$

$$D = [16 + 40\sqrt{2} + 5^2 \times (\sqrt{2})^2] + (6 \times 2 + 14\sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 21)$$

$$D = [16 + 40\sqrt{2} + 25 \times 2] + (12 + 14\sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 21)$$

$$D = [16 + 40\sqrt{2} + 50] + (12 + 14\sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 21)$$

$$D = 16 + 40\sqrt{2} + 50 + 12 + 14\sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 21$$

$$D = 16 + 50 + 12 + 21 + 40\sqrt{2} + 14\sqrt{2} + 9\sqrt{2} = 99 + 63\sqrt{2}$$

$$D = 99 + 63\sqrt{2}$$